[Wh.: Newton-System (autonom): $G \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $F: G \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^r, $m > 0$.

$$(*) \qquad m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \qquad \text{(2. Newton-Gesetz)}$$

$z := (x,y)$, $f: D \to \mathbb{R}^{2n}$, $D := G \times \mathbb{R}^n$ Phasenraum

$$f(x,y) = \left(y, \frac{1}{m} F(x,y)\right)$$

$$(**) \qquad \dot{z} = f(z) \iff \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} F(x,y) \end{aligned}$$

Lösungen von $(**)$: $\beta(t) = (\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$ mit Lösungen α von $(*)$. Oft schreibt man für unabhängiges y doch $\dot{x}$ (und überlastet damit $\dot{x}$).

(1.8) Beispiel. (1. Newtonsche Gesetz) Kräfte-freie Bewegung.

In diesem Fall ist $F = 0$ und man „integriert"

$$(1) \quad \dot{x} = y$$

$$(2) \quad \dot{y} = 0$$

von „hinten nach vorne": Ist $(x_0, y_0) \in D = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ Anfangswert, so folgt zunächst aus (2): $y(t) = y_0, \ \forall t \in \mathbb{R}$, und dann, in (1) eingesetzt:

$$x(t) = y_0 t + x_0 \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Es ist also $I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$, $\forall (x_0, y_0) \in D$, und $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$,

$$\varphi^t(x,y) = (yt + x,\ y)$$

bzw., wenn man mit $\psi^t := pr_1 \circ \varphi^t$ bezeichnet:

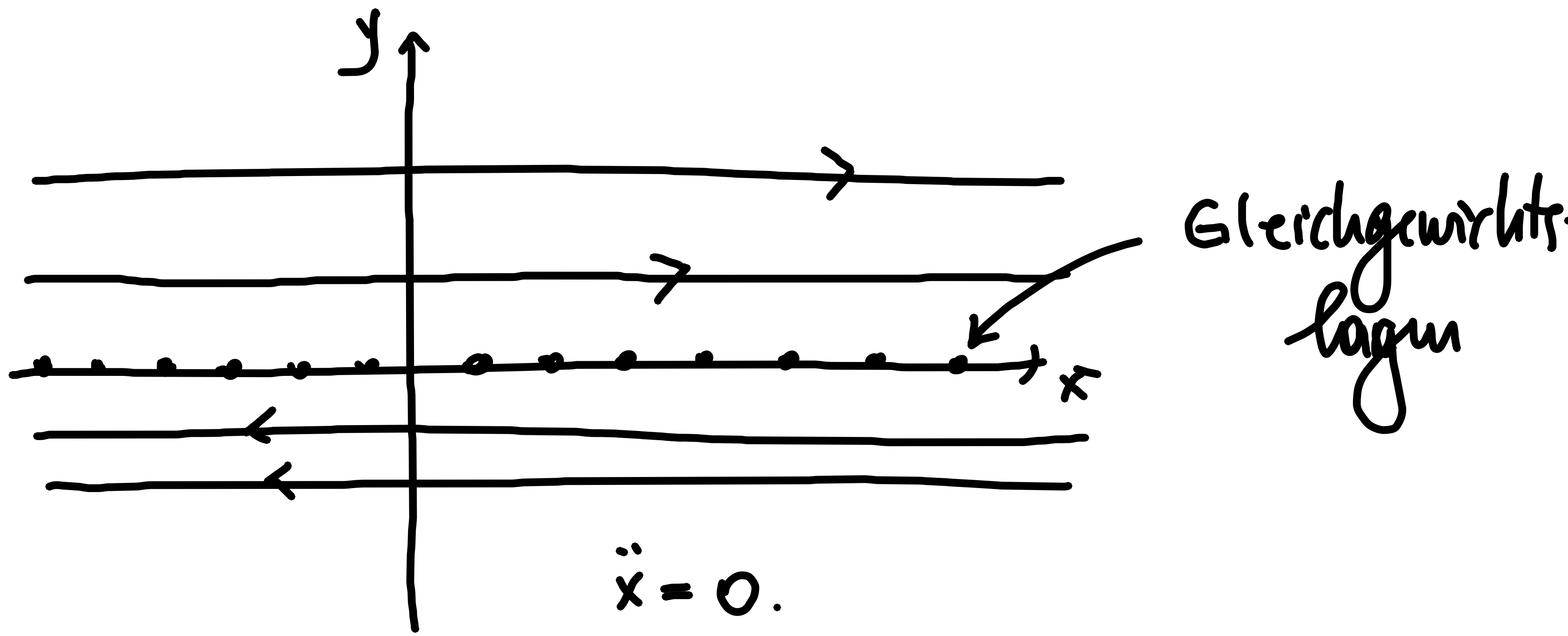
$$\psi^t(x,y) = yt + x$$

⌈noch intuitiver:

$$\psi^t(x,\dot{x}) = \dot{x}t + x.$$ ⌋

die geradlinig gleichförmig Bewegung. (Newton 1: Ein kräftefreies Teilchen bewegt sich gleichförmig geradlinig).

<u>Phasendiagramm</u>: Phasenraum mit einigen repräsentativen Bahnen. Hier



$\ddot{x} = 0.$

(1.9) <u>1-dimensionale Systeme</u>. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ C^r, so ist das qualitative Verhalten weitgehend klar:

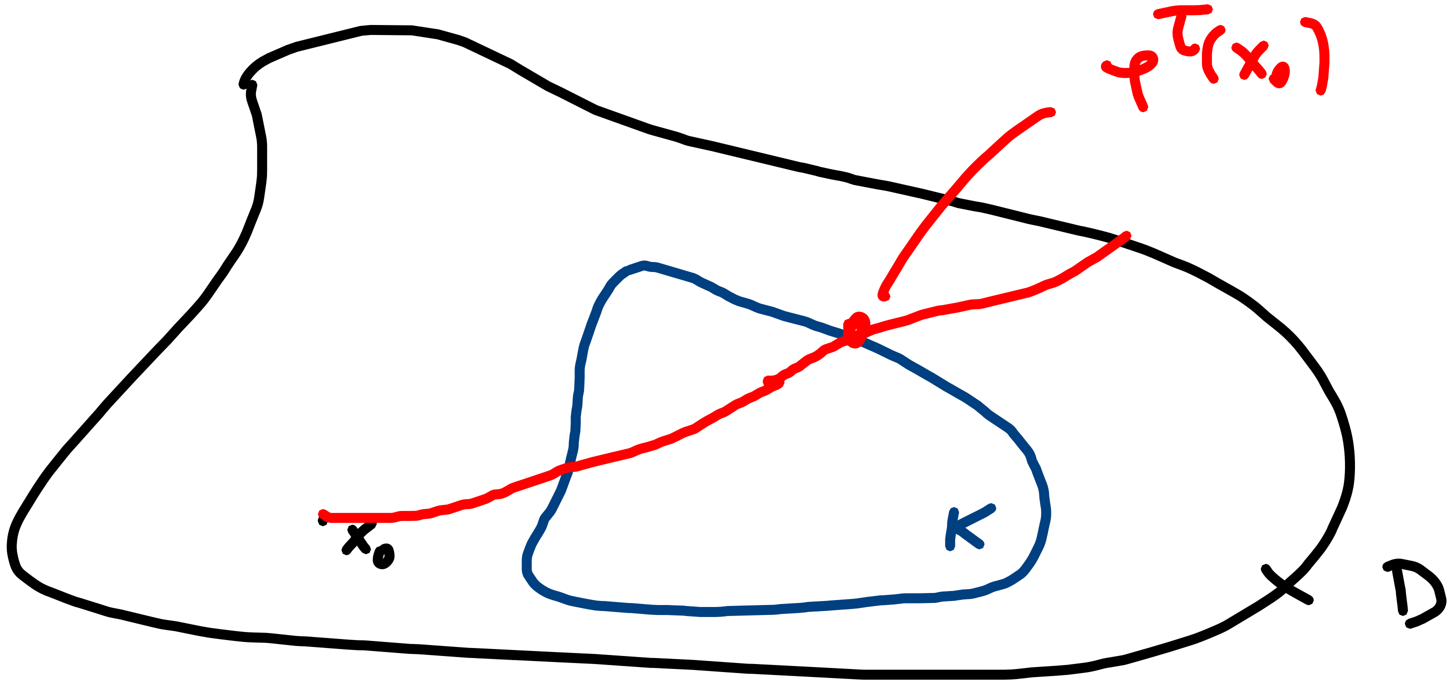
(i) In den Nullstellen von f liegen die Gleichgewichtslagen

(ii) Ist f zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen $x_1 < x_2$ positiv, $f|(x_1,x_2) > 0$, so ist für jedes $x \in (x_1,x_2)$: $I(x) = \mathbb{R}$ und

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x) = x_2, \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi^t(x) = x_1 .$$

Hierbei haben wir folgenden qualitativen Satz aus Analysis-IV, SS 2021, benutzt:

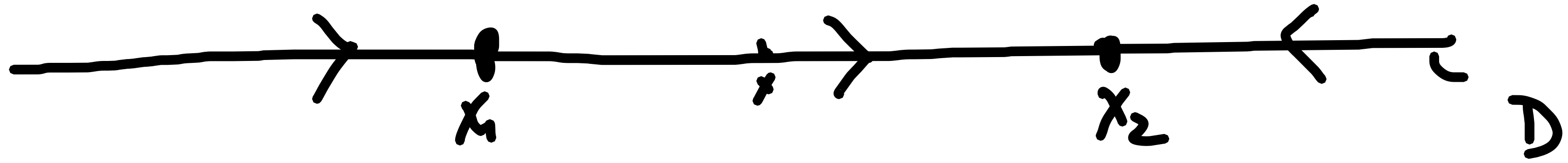
Satz. Sei $f \in C^r(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $x_0 \in D$ mit $t_+(x_0) < \infty$. Dann gilt: Für jedes Kompaktum $K \subseteq D$ existiert ein $\tau < t_+(x_0)$, so dass $\varphi^t(x_0) \notin K$, $\forall t \in (\tau, t_+(x_0))$.

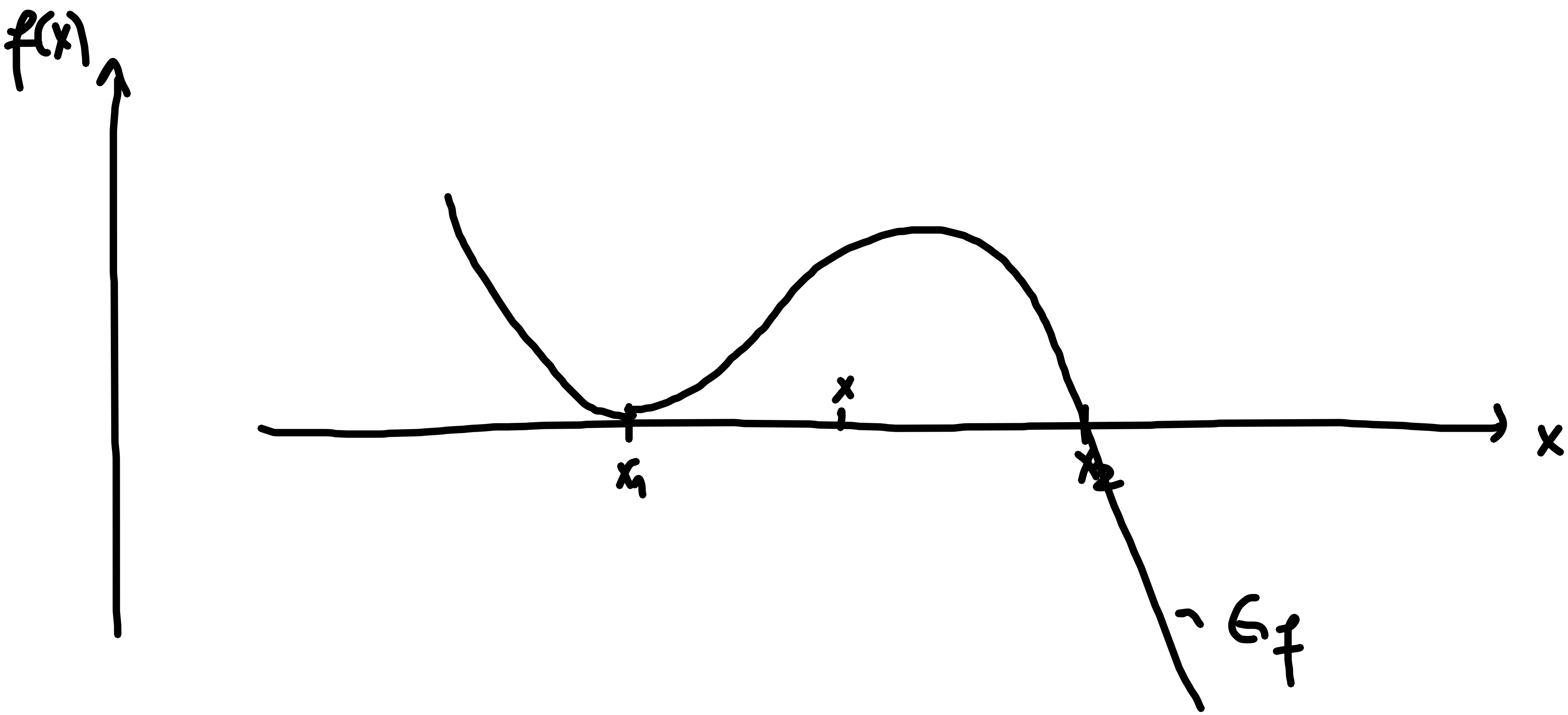


Das bedeutet:

$$\lim_{t \to t_+} \left(\min \left(\operatorname{dist}(x(t), \partial D), \frac{1}{\|x(t)\|} \right) \right) = 0$$

Phasendiagramm 1-dimensionaler Systeme:


x_1
x_2
D

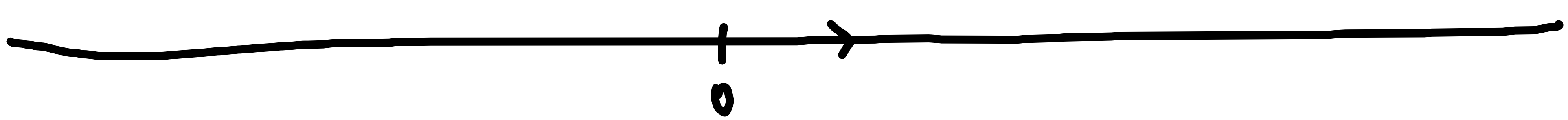

$f(x)$
x
x_1
x_2
x
G_f

Einzig offen bleibt, ob jenseits der größten Nullstelle x_* (falls es so eine gibt), sagen wir $f|(x_*,\infty)\cap D > 0$ den Rand von D bzw. $+\infty$ in endlicher oder unendlicher Zeit erreicht:

(i) Phasendiagramm von $\dot{x} = x$ auf $\mathbb{R}$

$\varphi^t(x) = x e^t$ $\quad (\Rightarrow t_+(0) = \infty,\ t_-(0) = +\infty)$

(ii) Phasendiagramm von $\dot{x} = 1 + x^2$



$$\varphi^t(0) = \tan t \quad \Rightarrow \quad I(0) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Also: $t_+(0) = \frac{\pi}{2}$, $t_-(0) = -\frac{\pi}{2}$.

(1.11) Im Falle der Dimension 1 kann man die Lösungen sogar analytisch „durch Quadratur" angeben:

<u>Satz</u>. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: J \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar und ohne Nullstellen. Sei $x_0 \in J$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass die Funktion $\tau: J \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)},$$

ein Diffeomorphismus von J auf I ist, $\tau: J \xrightarrow{\cong} I$, und ihre Umkehrung $\tau^{-1}: I \to J$ ist die (maximale) Lös.-kurve des Systems $\dot{x} = f(x)$ auf J zum Anfangswert x_0,

$$\varphi^t(x_0) = \tau^{-1}(t).$$

<u>Beweis</u>. Da f stetig und ohne Nullstellen ist, ist $f > 0$ (überall) oder $f < 0$ (überall). Sei o.E.: $f > 0$ (Beweis ähnlich bei $f < 0$.) Es ist dann die Integralfunktion τ von $\frac{1}{f}$ streng monoton wachsend, denn $\tau' = \frac{1}{f} > 0$ und $\tau(x_0) = 0$. Nach dem Umkehrsatz ist dann $\tau(J) =: I$ ein offenes Intervall, $\tau^{-1}: J \to I$ auch stetig diff'bar (wegen $\tau' \neq 0$ überall) und für $\alpha := \tau^{-1}$ gilt:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{\tau'(\alpha(t))} = \frac{1}{\frac{1}{f(\alpha(t))}} = f(\alpha(t)), \quad \forall t \in I,$$

sowie $\alpha(0) = x_0$. α ist also die Lös.-kurve von $\dot{x} = f(x)$ auf J mit AW x_0 (und auch maximal). $\boxed{\text{M}}$

(1.12) Beispiel. (Wie man die e-Funktion entdecken kann)
Sei $J = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ und $f: J \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx$. Wir wollen das dynamische System zu

$$\dot{x} = f(x) = kx$$

ermitteln. Quadraturmethode (in „Physikermanier"):

$$\frac{dx}{dt} = kx \Longrightarrow \frac{dx}{kx} = dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{kx} = \int_0^t 1\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \ln(x)\Big|_{x_0}^{x} = t\Big|_0^t \Longrightarrow \frac{1}{k}\left(\ln(x) - \ln(x_0)\right) = t - 0 = t$$

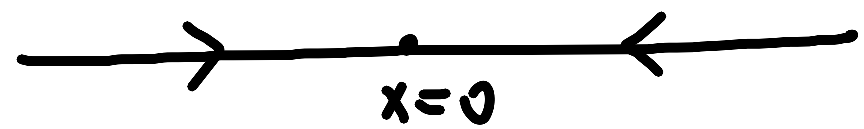
$\Longrightarrow$

$$kt(x) = \ln(x) - \ln(x_0) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

$$\Rightarrow \quad e^{kt} = \frac{x}{x_0} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{kt}$$

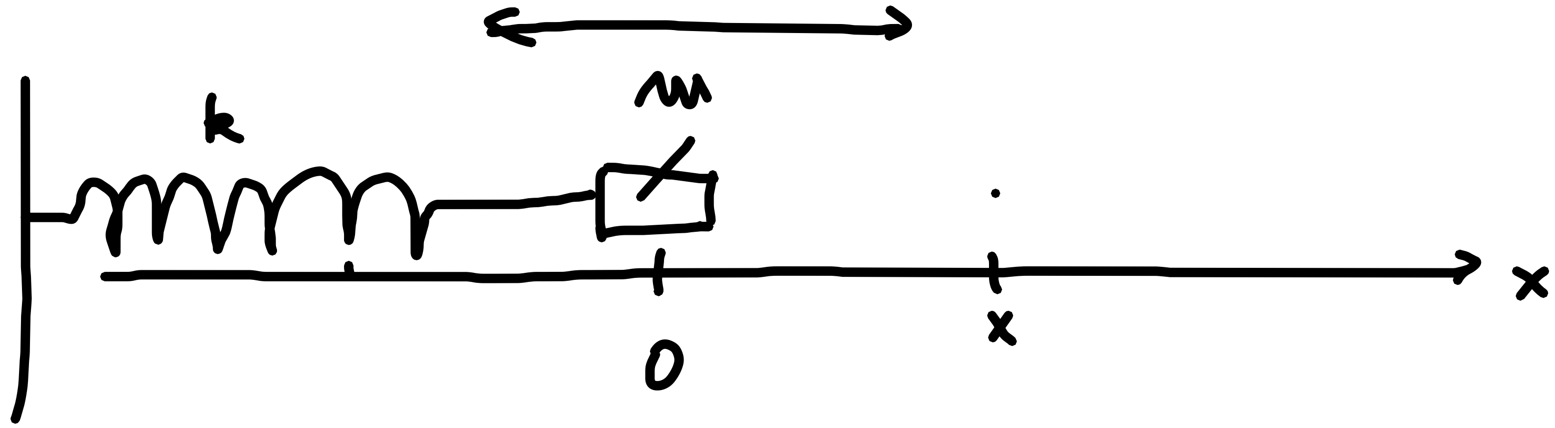
$$\Rightarrow \quad \varphi^t(x) = x\, e^{kt}.$$

Phasendiagramm:

$k < 0$: 

$k > 0$:  .

(1.12) Beispiel (Hookesches Gesetz). Bewegung eines Körpers der mit der Kraft einer Feder unterliegt:



Hooke: Die Kraft $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist proportional (und entgegengesetzt) zur Auslenkung x (bei nicht zu großem x),

$$F(x) = -kx$$

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz erfüllt die gesuchte Bewegung x die Gleichung

$$m\ddot{x} = -kx$$

($m>0$ die (träge) Masse des Körpers, k die Federkonstante).

Setzen wir

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0,$$

so wird diese zur (linearen) Schwingungsgleichung

$$(*) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Zwei Methoden, wie man Sinus und Cosinus entdecken kann, denn die Lösung wird sein:

$$\varphi^t(x, \dot{x}) = x \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

1. Methode: Lineare Algebra

Das zugehörige System 1. Ordnung auf $D = \mathbb{R}^2$ ist:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -\omega^2 x\end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(lineares System)

<u>Idee</u>: Transformiere Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $S \in GL_2(\mathbb{R})$, so dass das System in den neuen Koordinaten „entkoppelt":

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = S^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\underbrace{S^{-1} A S}_{=:D}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

d.h.: D diagonal wird, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2.$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\omega.$$

- <u>Idee</u>: Betrachte

$$\dot{z} = Az$$

gar nicht auf $\mathbb{R}^2$, sondern auf $\mathbb{C}^2$,

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Führe dann Koordinatenwechsel auf Eigenvektoren von A durch $z = Sw$ mit $S \in GL_2\,\mathbb{C}$ und löse dann

$$\dot{w} = Dw \qquad \text{mit } D = \begin{pmatrix} +i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix},$$

also

$$w_1(t) = w_1 e^{i\omega t}$$
$$w_2(t) = w_2 e^{-i\omega t}.$$

Rücktransformation liefert dann, dass Lösung von (*) Linearkombination der Real- und Imaginärteile von $e^{i\omega t}$ und $e^{-i\omega t}$ ist,

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right), \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Im}\left(e^{+i\omega t}\right).$$